РАЗДЕЛ II
НЕПРЕРЫВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Лекция 6.2
КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ (2 ч)

Учебные цели занятия:

1. Изучить критерий устойчивости Найквиста.
2. Изучить определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

Учебные вопросы:

1. Критерий устойчивости Найквиста.
2. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

Учебный вопрос № 1.

Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста

В 1932 году Найквист предложил принципиально новый критерий устойчивости. В отличие от критерия Гурвица, который устанавливает принадлежность корней к левой полуплоскости для любого полинома или алгебраического уравнения, критерий Найквиста предназначен для исследования устойчивости только замкнутых систем.

Критерий Найквиста — это графоаналитический критерий. Характерной его особенностью является то, что вывод об устойчивости или неустойчивости замкнутой системы делается в зависимости от вида амплитудно-фазовой (а. ф. х.) или логарифмических частотных характеристик (л. ч. х.) разомкнутой системы.

Помимо исследования устойчивости по виду указанных характеристик можно оценить и некоторые качественные показатели замкнутой системы, например, запас устойчивости. Более того, появляется возможность указать, как и за счет каких средств неустойчивая замкнутая система может быть сделана устойчивой и как можно повысить качество устойчивой замкнутой системы.

Критерий устойчивости Найквиста

На лекции 5 было введено понятие передаточной функции разомкнутой системы. Эта функция может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m}{c_0 p^n + c_1 p^{n-1} + \cdots + c_n}, \qquad (6.19)$$

причем степень числителя не может быть выше степени знаменателя, $m \le n$. При подстановке $p = j\omega$ получается *частотная передаточная функция разомкнутой системы*

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{C(j\omega)} = A(\omega)e^{j\psi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega). \qquad (6.20)$$

Частотная передаточная функция разомкнутой системы представляет собой комплексное число. На основании рассмотренных на лекции 4 частотных характеристик смысл ее можно объяснить следующим образом (рис. 6.8).

Критерий устойчивости Найквиста

Представим себе систему управления в разомкнутом состоянии в виде некоторого звена с передаточной функцией $W(p)$. Если на вход этого звена подавать сигнал ошибки в виде гармонических колебаний $x = X_{max} \sin \omega t$, с амплитудой X_{max} и частотой ω, то в установившемся режиме на выходе управляемая величина будет изменяться также по гармоническому закону $y = Y_{max} \sin (\omega t + \psi)$ с амплитудой Y_{max}, той же частотой и фазовым сдвигом ψ. Модуль частотной передаточной функции представляет собой отношение амплитуд выходной и входной величин:

$$A(\omega) = \frac{Y_{max}}{X_{max}} \qquad (6.21)$$

а аргумент — сдвиг фаз ψ. При постоянном значении X_{max} амплитуда Y_{max} зависит от частоты входного сигнала: $Y_{max} = Y_{max}(\omega)$. От частоты зависит и сдвиг фаз, или фаза: $\psi = \psi(\omega)$.

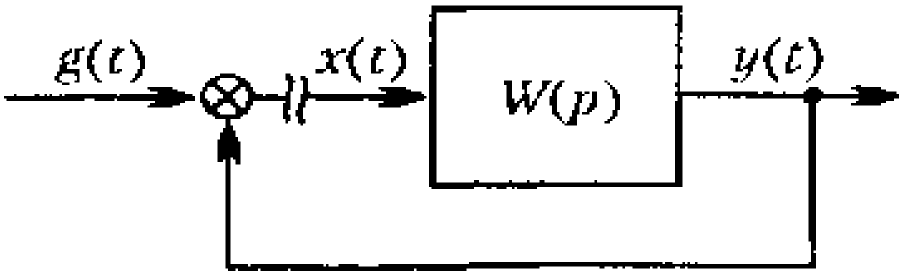


Рис. 6.8

Критерий устойчивости Найквиста

Если изменять частоту входного воздействия от 0 до ∞ и откладывать на комплексной плоскости точки, соответствующие получающимся комплексным числам, то геометрическое место этих точек образует амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы (рис. 6.9).

На амплитудно-фазовой характеристике для удобства могут отмечаться точки, соответствующие определенным частотам, например ω_1, ω_2, ω_3 и т. д. Вдоль кривой иногда рисуют стрелки, которые показывают направление возрастания частоты ω.

В реальных системах всегда удовлетворяется условие $m < n$. Поэтому при частоте, стремящейся к бесконечности, модуль частотной передаточной функции стремится к нулю и точка с частотой $\omega \to \infty$ попадает в начало координат.

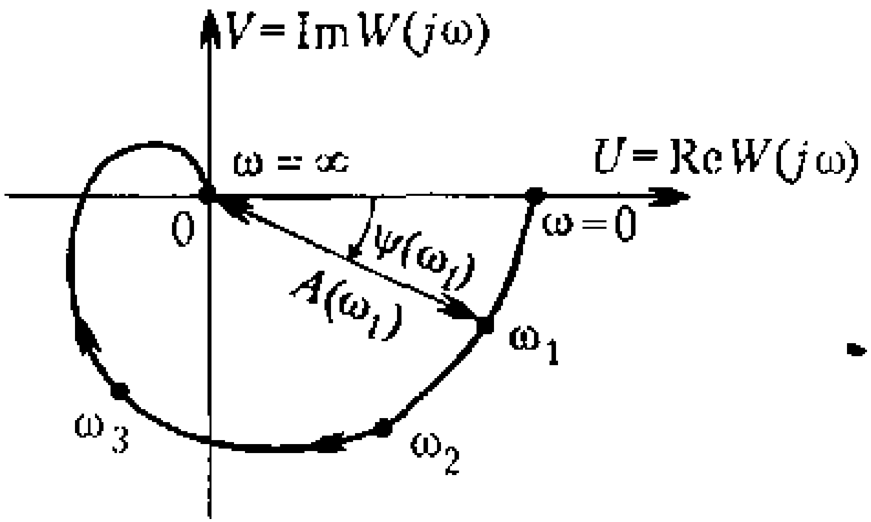


Рис. 6.9

Критерий устойчивости Найквиста

Для построения а.ф.х. в выражении (6.20) можно выделить вещественную $U(\omega)$ и мнимую $V(\omega)$ части. Однако, если порядок системы $n > 2$, удобнее использовать полярные координаты, определяя модуль А (ω) и фазу ψ (ω). С этой целью передаточную функцию (6.19) целесообразно представить в так называемой стандартной форме:

$$W(p)=\frac{B(p)}{C(p)}=\frac{K(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)\left(\tau_3^2 p^2+2\xi_3\tau_3 p+1\right)\ldots}{p^2(T_1 p+1)(T_2 p^2+2\xi_2 T_2 p+1)(T_3 p-1)\ldots}. \qquad (6.22)$$

Коэффициент K называется *коэффициентом передачи разомкнутой системы*, а постоянные τ_i- и T_i — *постоянными времени*. Коэффициенты могут принимать любые значения от 0 до 1.

Соответствующая (6.22) частотная передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p)=\frac{K(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)\left[\left(1-\tau_3^2\omega^2\right)+2j\xi_3\tau_3\omega\right]\ldots}{(j\omega)(1+j\omega T_1)\left[\left(1-T_2^2\omega^2\right)+2j\xi_2 T_2\omega\right](-1+j\omega T_3)\ldots}. \qquad (6.23)$$

При таком представлении модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ равен отношению модулей числителя и знаменателя, а аргумент (фаза) ψ(ω) — разности их аргументов. В свою очередь, модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей, а аргумент — сумме аргументов.

Критерий устойчивости Найквиста

Модули и аргументы, соответствующие сомножителям передаточной функции (6.22), приведены в табл. 6.1.

Сомножитель	$A(\omega)$	$\psi(\omega)$
k	k	0
p	ω	$\frac{\pi}{2}$
p^2	ω^2	π
$Tp+1$	$\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$\operatorname{arctg}\omega T$
$Tp-1$	$\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$\pi-\operatorname{arctg}\omega T$
$1-Tp$	$\sqrt{1+T^2\omega^2}$	$-\operatorname{arctg}\omega T$
T^2p^2+1	$\lvert 1-T^2\omega^2\rvert$	$0,\quad \omega<\frac{1}{T};$ $\pi,\quad \omega>\frac{1}{T}$
$T^2p^2+2\xi Tp+1$	$\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4\xi^2T^2\omega^2}$	$\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T}{1-T^2\omega^2},\quad \omega<\frac{1}{T};$ $\pi-\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega T}{T^2\omega^2-1},\quad \omega\geqslant\frac{1}{T}$

Критерий устойчивости Найквиста

Сформулируем требования к а. ф. х. разомкнутой системы, при выполнении которых замкнутая система будет устойчивой.

Ограничим вначале задачу и будем рассматривать только устойчивые в разомкнутом состоянии системы. Это значит, что в характеристическом полиноме разомкнутой системы $C(p)$, представляющем собой знаменатель передаточной функции (6.22), нет нулевых корней ($r = 0$), а остальные корни имеют отрицательные вещественные части. Для этого, как показано в предыдущей лекции, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты полиномов первого и второго порядков были положительными, т. е. в полином $C(p)$ должны входить только сомножители типа $T_i p + 1$ и $T_i^2 p^2 + 2\xi_i T_i p + 1$ при $\xi_i \neq 0$. Ниже будет показано, что при определенных условиях первое ограничение может быть снято.

Критерий устойчивости Найквиста

Если замкнутая система устойчива, то в полином $D(p)$ входят только сомножители первого и второго порядка с положительными коэффициентами, аналогичные указанным выше сомножителям полинома $C(p)$. Аргумент первого из них, как следует из табл. 6.1, изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а второго — от 0 до π. Таким образом, при изменении частоты от 0 до ∞ аргумент $D(j\omega)$ изменяется на величину $\psi_1 = n\frac{\pi}{2}$, где n — степень полинома $D(p)$. Степень полинома $C(p)$ такая же, как и полинома $D(p)$.

Поэтому аргумент $C(j\omega)$ изменяется на такую же величину: $\psi_2 = n\frac{\pi}{2}$. Результирующий угол поворота $W_1(j\omega)$ равен нулю: $\psi = \psi_1 - \psi_2 = 0$. Это означает, что для устойчивой замкнутой системы годограф вектора $W_1(j\omega)$ не должен охватывать начало координат (рис. 6.10, а).

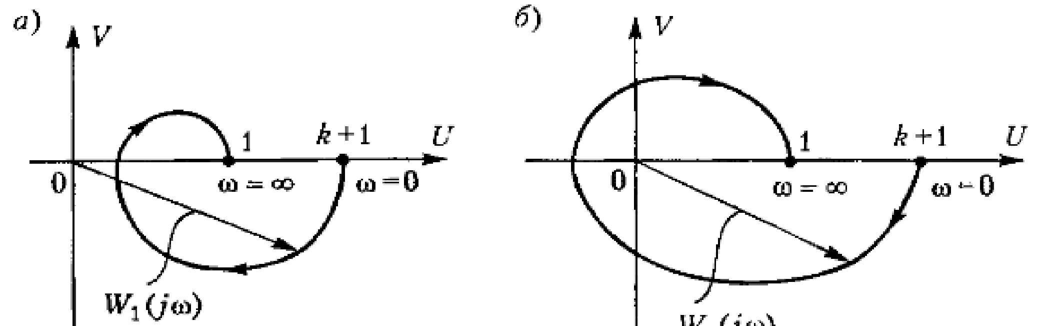


Рис. 6.10

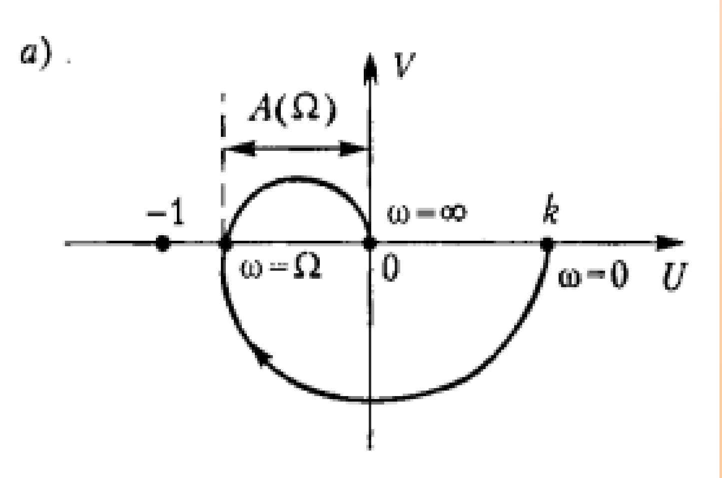
Критерий устойчивости Найквиста

Частотная передаточная функция разомкнутой системы $W(j\omega)$ отличается от вспомогательной функции $W_1(j\omega)$ на единицу. Поэтому она для устойчивой замкнутой системы не должна охватывать точку с координатами (-l; j0), т. е. должна проходить так, как показано на рис. 6.11, *а*.

Если замкнутая система неустойчива, то в полиноме $D(p)$ появляются сомножители первого или второго порядка с отрицательными коэффициентами типа $T_i p$ - 1 или $T_i^2 p^2 - 2\xi_i T_i p + 1$, корни которых положительные или имеют положительные вещественные части. Аргумент, соответствующий первому из них (см. табл. 6.1) изменяется от π до $\frac{\pi}{2}$, т. е. на $-\frac{\pi}{2}$, а второму — на $-\pi$. Если общее число таких корней l, то им соответствует изменение аргумента $D(j\omega)$ на величину $-l\frac{\pi}{2}$.

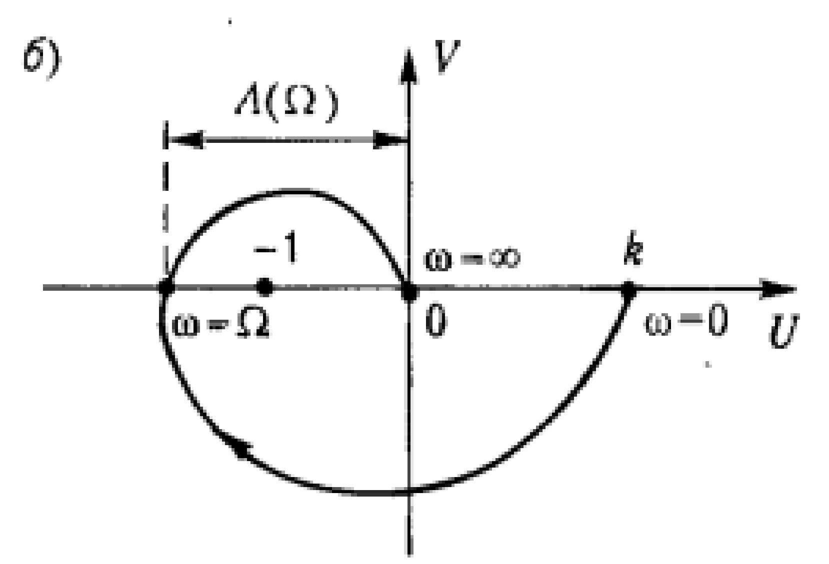
Остальным n - l корням с отрицательной вещественной частью соответствует изменение на величину $(n-l)\frac{\pi}{2}$. Таким образом, аргумент $D(j\omega)$ изменяется на величину

$$\psi_1 = -l\frac{\pi}{2} + (n-l)\frac{\pi}{2} = n\frac{\pi}{2} - l\pi.$$



Критерий устойчивости Найквиста

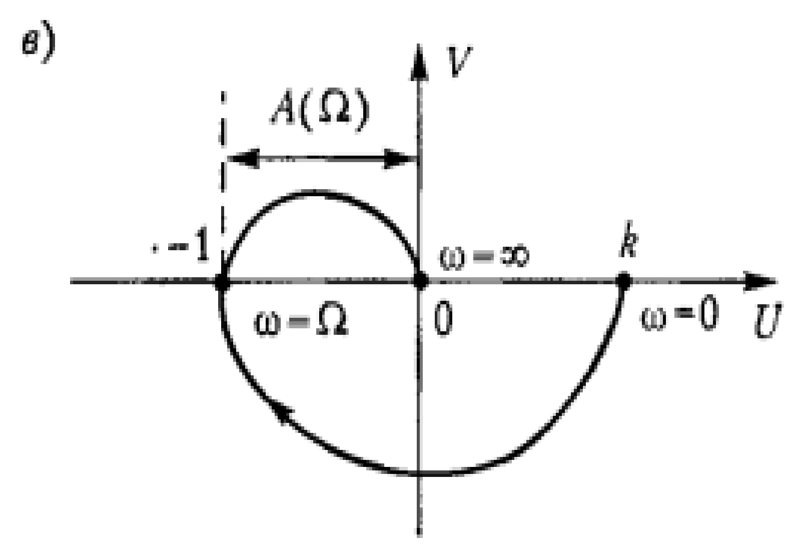
Аргумент $C(j\omega)$ остается прежним: $\psi_2 = n\frac{\pi}{2}$. Результирующий угол поворота вектора $W_1(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ $\psi = \psi_1 - \psi_2 = -l\pi$. Это означает, что для неустойчивой замкнутой системы годограф вектора $W_1(j\omega)$ охватывает начало координат на угол πl по часовой стрелке (рис. 6.10, б), а а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 6.11, *б*) охватывает на тот же угол точку (-1; j0). В частности, на рис. 6.10, *б* и рис. 6.11, *б* угол охвата равен -2π, т. е. в полиноме $D(p)$ имеется два корня с положительной вещественной частью.



Критерий устойчивости Найквиста

Если замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости, то в полиноме $D(p)$ нет корней с положительной вещественной частью, но имеется пара чисто мнимых корней $p_{1,2} = \pm j\Omega$. Эта граница наиболее характерна для устойчивых в разомкнутом состоянии систем. В этом случае, как следует из выражения (6.16), $D(j\Omega) = 0$, а $W(j\Omega) = -1$. Это означает, что на частоте $\omega = \Omega$ модуль $A(\Omega) = 1$, а фаза $\psi(\Omega) = -\pi$, т. е. а. ф. х. разомкнутой системы (рис. 6.11, в) проходит через точку (-l; j0).

Таким образом, если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами (-1; j0).

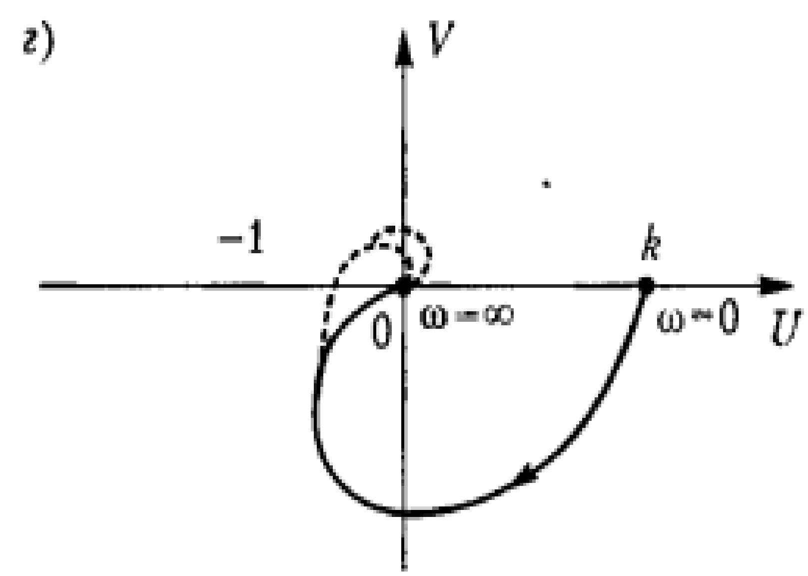


Критерий устойчивости Найквиста

Для случаев, изображенных на рис. 6.11, *а* — 6.11, *в*, исходя из критерия Найквиста можно сформулировать условие устойчивости замкнутой системы. Пусть $\omega = \Omega$ — частота, на которой фаза $\psi(\Omega) = -\pi$. Тогда замкнутая система будет устойчивой, если модуль $A(\Omega) < 1$ и неустойчивой, если $A(\Omega)>1$. При $A(\Omega) = 1$ замкнутая система находится па колебательной границе устойчивости, а Ω — это частота незатухающих колебаний, возникающих в системе (см. рис. 6.2, *г*).

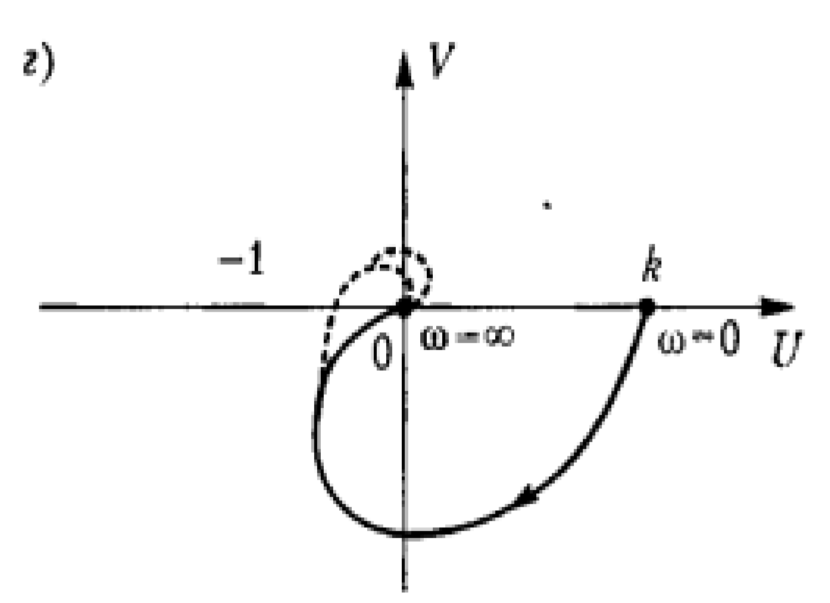
Фаза $\psi(\omega)$, как видно из выражения (6.22), зависит от значений постоянных времени. Величина модуля, кроме того, пропорциональна коэффициенту передачи разомкнутой системы К.

На лекции 7 будет показано, что увеличение K благоприятно влияет на точность системы. Однако одновременно увеличивается и модуль $A(\Omega)$. При некотором критическом значении $K = K_{кр}$ замкнутая система попадает на колебательную границу устойчивости, а при $K > K_{кр}$ она становится неустойчивой.



Критерий устойчивости Найквиста

В случае, изображенном на рис. 6.11, *г*, замкнутая система устойчива при сколь угодно большом значении коэффициента передачи разомкнутой системы. Однако практически всегда существуют неучтенные в передаточной функции (6.22) малые постоянные времени, из-за чего реальная а.ф.х. разомкнутой системы будет такой, как показано пунктиром, а замкнутая система станет критичной к увеличению *K*.



Критерий устойчивости Найквиста

На рис. 6.12 изображен более сложный случай, когда замкнутая система может стать неустойчивой как при увеличении, так и при уменьшении коэффициента передачи разомкнутой системы. При $A(\Omega_3) < 1$, $A(\Omega_2) > 1$ замкнутая система устойчива. При увеличении K она станет неустойчивой, если $A(\Omega_3) > 1$, а при уменьшении K — если $A(\Omega_2) < 1$, $A(\Omega_1) > 1$. Если же $A(\Omega_1) < 1$, то замкнутая система вновь станет устойчивой.

Следует отметить, что если разомкнутая система устойчива, то устойчив и сам управляемый объект, так как его характеристический полином $C_0(p)$ согласно (5.13) входит в состав полинома $C(p)$.

Поэтому система автоматического управления создается не для обеспечения устойчивости объекта, а для придания системе свойств, отличающихся от свойств объекта, например, для повышения точности поддержания управляемой величины (температуры, давления и т. п.) на заданном уровне при наличии возмущений.

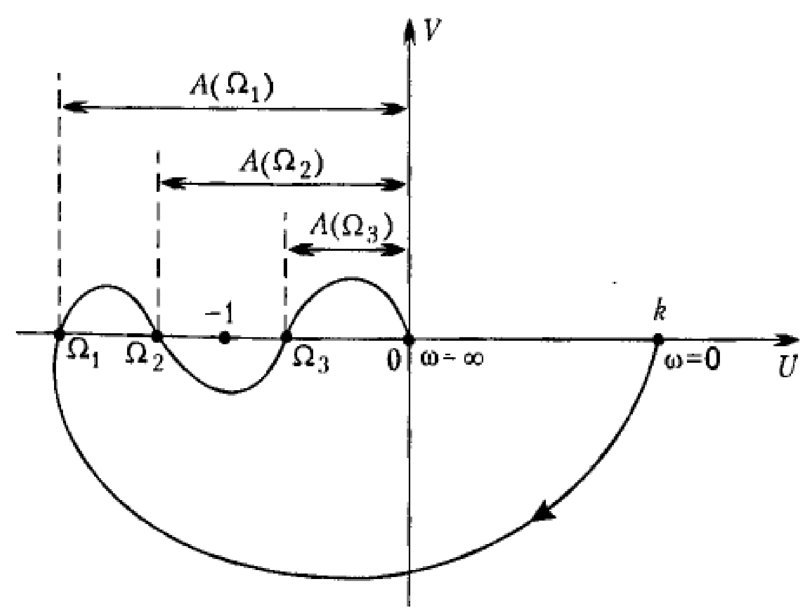


Рис. 6.12

Критерий устойчивости Найквиста

Снимем теперь первое ограничение на корни характеристического полинома разомкнутой системы $C(p)$. Будем полагать, что в нем кроме корней с отрицательными вещественными частями есть нулевые корни, т. е. в выражении (6.22) $r \neq 0$.

При наличии одного нулевого корня ($r = 1$) в знаменателе (6.23) появится сомножитель $j\omega$, модуль которого равен ω, а фаза равна $\frac{\pi}{2}$. В результате на частоте ω = 0 модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (6.23) $A(0) = \infty$, а фаза $\psi(0) = -\frac{\pi}{2}$, т. е. амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы будет иметь разрыв непрерывности (рис. 6.13, а).

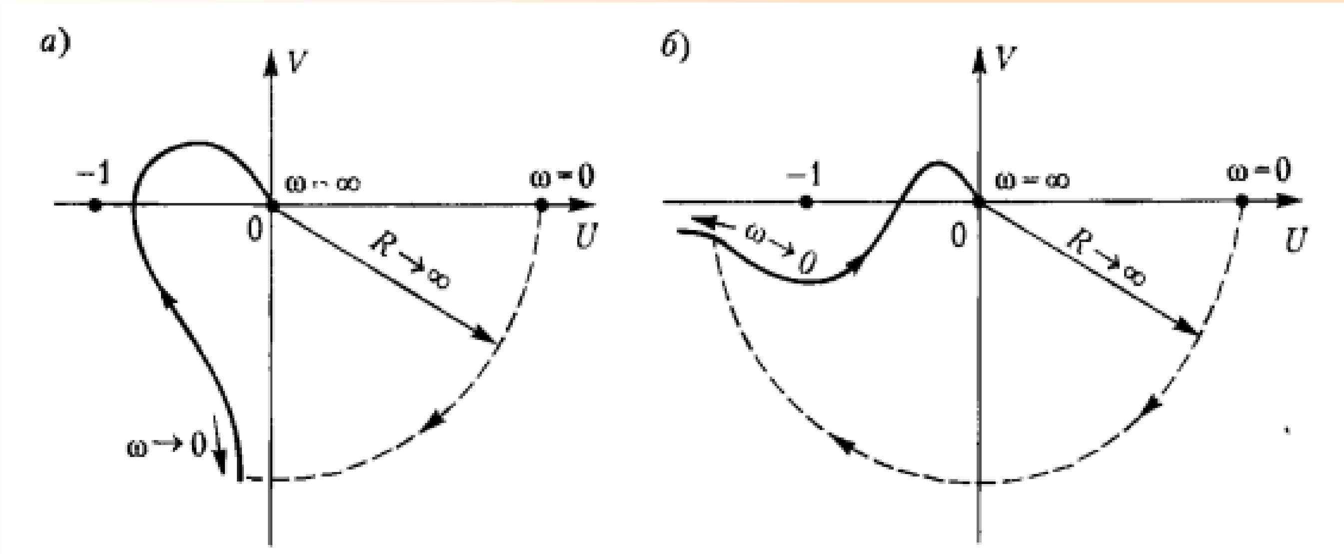


Рис. 6.13

Критерий устойчивости Найквиста

Для получения определенности в ходе а. ф. х. заменим пулевой корень p_1 = 0 бесконечно малым вещественным отрицательным корнем p_1 = -α. Тогда вместо *j*ω получим сомножитель $j\omega$ + α, модуль которого $A_1(\omega) = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ при ω = 0 стремится к нулю, а фаза ψ_1(ω) = arctg$\frac{\omega}{2}$ изменяется от нуля при ω = 0 до $\frac{\pi}{2}$ при ω→0. При этом модуль (6.23) *A*(0) будет стремиться к бесконечности, а фаза будет изменяться от нуля до -$\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, а. ф. х. разомкнутой системы при *r* = 1 (см. рис. 6.13, а) дополнится *по часовой стрелке четвертью окружности с радиусом R*→∞ начало которой находится на вещественной оси, и разрыв непрерывности будет уст

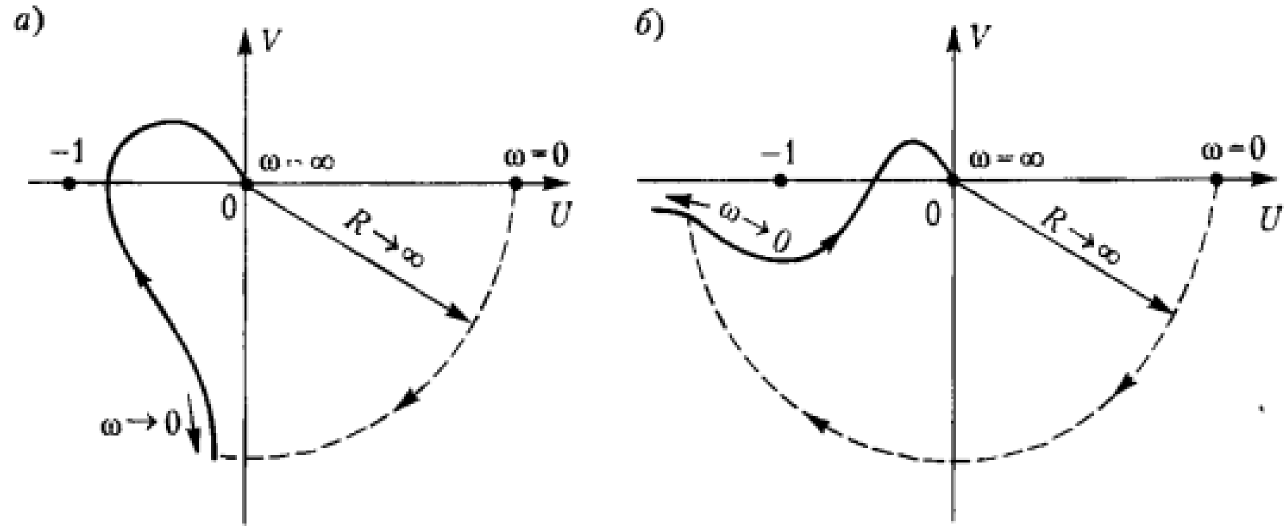


Рис. 6.13

Критерий устойчивости Найквиста

Кроме того, так как нулевой корень заменен вещественным отрицательным корнем, то разомкнутую систему можно считать устойчивой. Все это означает, что для исследования устойчивости замкнутой системы можно применять приведенную выше формулировку критерия Найквиста.

При наличии двух нулевых корней (r = 2) на частоте ω = 0 модуль частотной передаточной функции (6.23) A(0) = ∞, а фаза ψ(0) = -π. Аналогичными рассуждениями можно показать, что в этом случае а. ф. х. разомкнутой системы следует дополнить *по часовой стрелке полуокружностью с радиусом R→∞* (рис. 6.13, *б*).

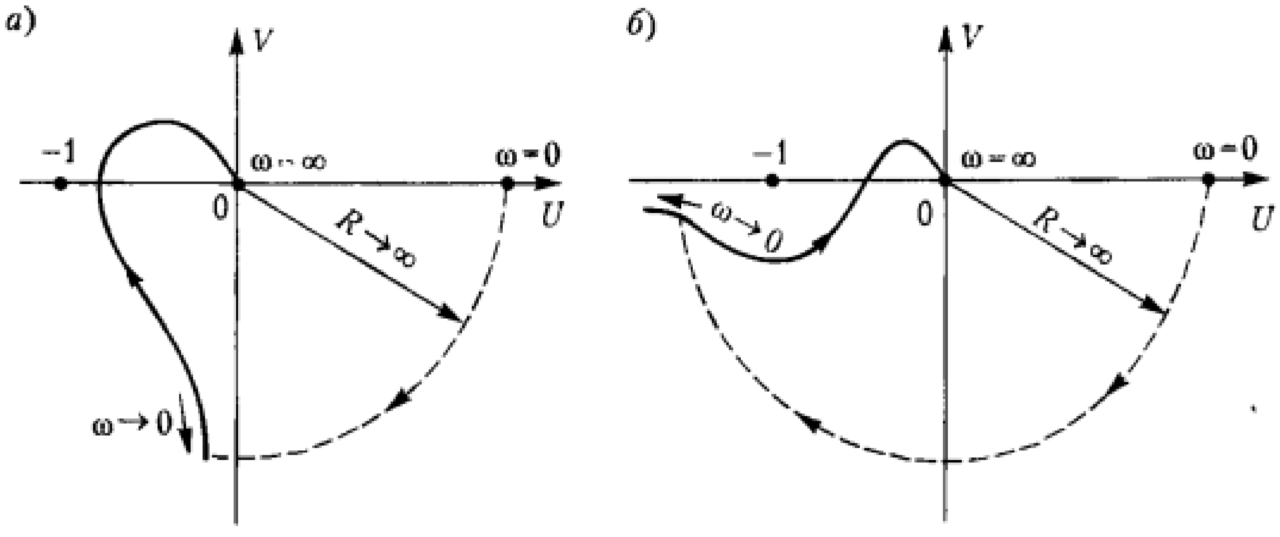


Рис. 6.13

Критерий устойчивости Найквиста

В случае рис. 6.14, *а* замкнутая система устойчива, если $A(\Omega) < 1$, так как при этом условии а. ф. х. разомкнутой системы не охватывает точку (-1; $j0$), и неустойчива, если $A(\Omega) > 1$. В случае рис. 6.14, *б* замкнутая система неустойчива.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим следящую систему, структурная схема которой изображена на рис. 6.4. Для этой системы была получена передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K}{p(1+T_y p)(1+T_м p)}.$$

Модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (см. табл. 6.1) $A(\omega) = |W(j\omega)| = \dfrac{K}{\omega\sqrt{(1+T_y^2\omega^2)(1+T_м^2\omega^2)}}$

и фаза $\psi(\omega) = -\dfrac{\pi}{2} - arctg\omega T_y - arctg\omega T_м = -\dfrac{\pi}{2} - arctg\dfrac{\omega(T_y+T_м)}{1-\omega^2 T_y T_м}$.

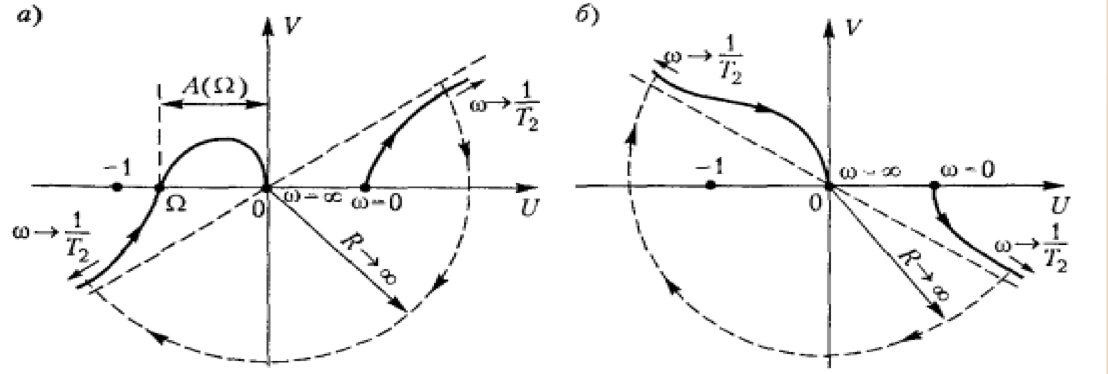


Рис. 6.14

Критерий устойчивости Найквиста

При ω = 0 модуль $A(0) = \infty$, а фаза ψ(0) = $-\frac{\pi}{2}$ По мере увеличения ω фаза изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{3\pi}{2}$ при ω = ∞. Это означает, что а. ф. х. разомкнутой системы располагается в третьем и втором квадратах комплексной плоскости. Модуль с увеличением со уменьшается и при ω = ∞ становится равным нулю. Таким образом, с учетом дополнения четвертью окружности и радиусом R→∞ а, ф. х. выглядит так, как показано на рис. 6.13, *а*.

Частоту Ω, на которой фаза ψ(Ω) = -π, найдем из условия

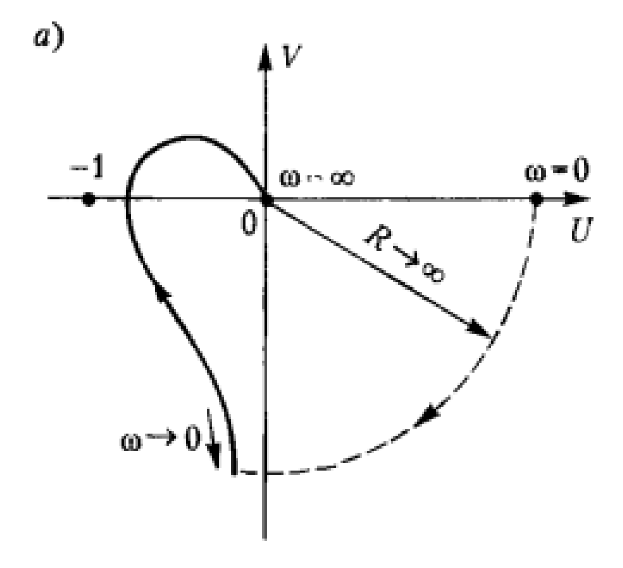
$$arctg\,\frac{\Omega(T_y+T_м)}{1-\Omega^2 T_y T_м} = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{T_y T_м}}.$$

Подставив это значение в выражение для модуля, получим:

$$A(\Omega) = \frac{K T_y T_м}{T_y+T_м}.$$



Критерий устойчивости Найквиста

Замкнутая система устойчива, если $A(\Omega) < 1$. Таким образом, условие устойчивости замкнутой системы

$$K < \frac{1}{T_у} + \frac{1}{T_м}$$

совпадает с найденным ранее условием, вытекающим из критерия Гурвица.

Обратимся теперь к более общему случаю, когда знаменатель передаточной функции разомкнутой системы содержит корни, лежащие в правой полуплоскости. Это соответствует неустойчивой в разомкнутом состоянии системе.

Появление неустойчивости разомкнутой системы может вызываться двумя причинами. Во-первых, это может быть следствием наличия неустойчивых звеньев, в том числе и неустойчивости самого управляемого объекта. Во-вторых, это может быть следствием потери устойчивости звеньев, охваченных положительными или отрицательными обратными связями.

Критерий устойчивости Найквиста

Наличие неустойчивости системы в разомкнутом состоянии не означает, что система будет неустойчивой в замкнутом состоянии. Она может быть как устойчивой, так и неустойчивой. Однако формулировка критерия устойчивости Найквиста при этом несколько меняется. Пусть знаменатель передаточной функции разомкнутой системы (6.22) содержит *l* корней в правой полуплоскости и *n* - *l* корней — в левой. Тогда при изменении частоты от 0 до ∞ для устойчивости в замкнутом состоянии системы результирующий угол поворота годографа вектора $W(j\omega)$ относительно точки (-1; *j*0) должен составить

$$\psi = \psi_1 - \psi_2 = n\frac{\pi}{2} - \left[(n-l)\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2}\right] = l \cdot \pi,$$

т. е. амплитудно-фазовая характеристика должна охватить точку (- 1; *j*0) столько раз, сколько корней в правой полуплоскости содержит знаменатель передаточной функции разомкнутой системы. Иными словами, в самом общем случае для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до *охватывала точку (- 1; j0) на угол lπ против часовой стрелки*. Приведенная ранее формулировка критерия Найквиста для случая, когда *l* = 0, вытекает отсюда как частный случай.

Критерий устойчивости Найквиста

Таким образом, при использовании критерия Найквиста необходимо проверить, имеются ли в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы корни, лежащие в правой полуплоскости, и сколько имеется таких корней.

Если в системе имеются местные обратные связи, например, такого типа, как это изображено на рис. 5.6 (Л5), то необходимо убедиться в том, что по цепи местной обратной связи не нарушена устойчивость при разомкнутой главной обратной связи. Проверка устойчивости по цепи местной обратной связи может быть сделана посредством использования любых критериев устойчивости, в том числе и посредством критерия Найквиста, который может применяться для разомкнутой местной обратной связи обычным путем построения для этой цели амплитудно-фазовой характеристики.

В случае если для местной обратной связи будет получено указание на ее неустойчивость, необходимо определить число корней, лежащих в правой полуплоскости.

Критерий устойчивости Найквиста

Следует заметить, что, хотя теоретически вся система в замкнутом состоянии может быть устойчивой при наличии неустойчивости по цепи местной обратной связи, практически такой случай является нежелательным и его надо избегать, стремясь использовать только устойчивые местные обратные связи. Поэтому, как правило, при расчете системы выбирают такие местные обратные связи, которые были бы устойчивыми при разомкнутой главной обратной связи.

В качестве примера рассмотрим систему угловой стабилизации ракеты, структурная схема которой изображена на рис. 6.5.

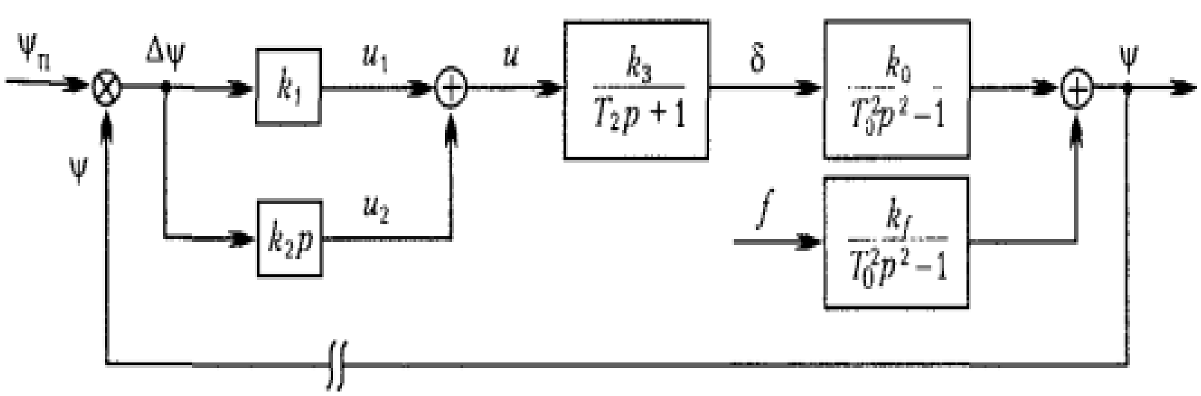


Рис. 6.5

Критерий устойчивости Найквиста

Для этой системы была получена передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = \frac{K(T_1 p+1)}{(T_2 p+1)(T_0^2 p^2-1)}$.

В характеристическом полиноме разомкнутой системы C(p), т. е. в полиноме знаменателя $W(p)$ имеется два вещественных отрицательных корня $p_1 = -\frac{1}{T_2}$, $p_2 = -\frac{1}{T_0}$ и один вещественный положительный корень $p_3 = +\frac{1}{T_0}$. Наличие последнего свидетельствует о неустойчивости управляемого объекта (ракеты) и разомкнутой системы в целом. Поэтому система автоматического управления создается, в первую очередь, для обеспечения устойчивого полета ракеты.

В данном случае $l = 1$. Таким образом, для устойчивости замкнутой системы а. ф. х. разомкнутой системы должна охватывать точку (-1, j0) на угол π против часовой стрелки.

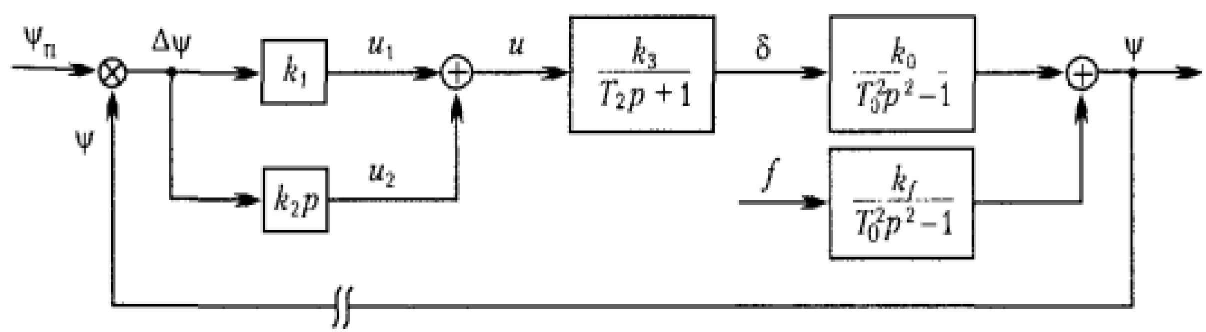


Рис. 6.5

Критерий устойчивости Найквиста

Для построения а. ф. х. находим модуль и фазу (см. табл. 6.1)

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{K\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{(1+T_0^2\omega^2)\sqrt{1+T_2^2\omega^2}},$$

$\psi(\omega) = -\pi + \mathrm{arctg}\,\omega T_1 - \mathrm{arctg}\,\omega T_2$.

При изменении частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ модуль изменяется от $A(0) = K$ до $A(\infty) = 0$, а фаза — от $\psi(0) = -\pi$ до $\psi(\infty) = -\pi$. Если $T_1 > T_2$, то при $\omega \neq 0$ и $\omega \neq \infty$ разность арктангенсов больше нуля, а. ф. х. располагается в третьем квадранте (рис. 6.15) и при $K > 1$ охватывает точку $(1, j0)$ на угол $+\pi$, т. е. против часовой стрелки. В этом случае замкнутая система устойчива. Если $T_1 < T_2$, то а. ф. х. располагается во втором квадранте и при $K > 1$ охватывает точку $(-1, j0)$ на угол $-\pi$. В этом случае замкнутая система неустойчива. Если же $K < 1$, то при любых значениях T_1 и T_2 а. ф. х. разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$ и замкнутая система неустойчива. Таким образом, замкнутая система устойчива, если $K > 1$, $T_1 > T_2$. Эти условия совпадают с найденными ранее при помощи критерия Гурвица.

Критерий устойчивости Найквиста

В ряде случаев более удобной может оказаться другая формулировка критерия Найквиста. Она основана на том, что величина и знак угла охвата точки (-1, j0) зависят только от того, как и сколько раз а. ф. х. разомкнутой системы пересекает отрезок вещественной оси, расположенной левее точки (-1, j0), и не зависят от ее прохождения правее этой точки. Например, нетрудно убедиться, что все три а. ф. х изображенные на рис. 6.16, охватывают точку (-1, j0) на угол +π.

Выделим на вещественной оси критический отрезок (рис. 6.16). Тогда для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы сумма переходов амплитудно-фазовой характеристики замкнутой системы через критический отрезок при изменении частоты от 0 до ∞ была равна $\frac{l}{2}$, где l — число корней с положительной вещественной частью в характеристическом полиноме разомкнутой системы.

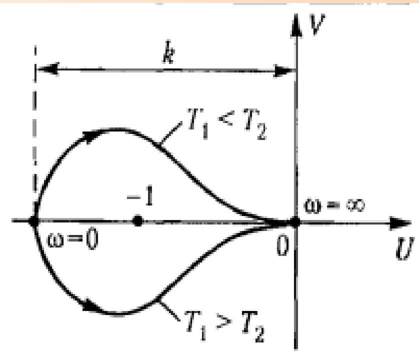


Рис. 6.15

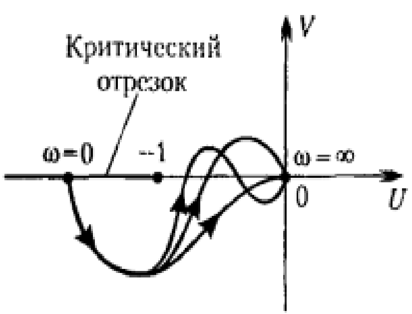


Рис. 6.16

Критерий устойчивости Найквиста

При этом переход сверху вниз считается положительным (+1), а снизу вверх — отрицательным (-1).Если при $\omega = 0$ а. ф. х. начинается на критическом отрезке, то имеет место $\frac{1}{2}$ перехода с соответствующим знаком. Например, на рис. 6.15 ($l = 1$) при $K > 1$ а. ф. х. совершает $+\frac{1}{2}$ перехода, если $T_1 > T_2$ (замкнутая система устойчива) и $-\frac{1}{2}$ перехода, если $T_1 < T_2$ (замкнутая система неустойчива). При $K < 1$ переходов нет и замкнутая система неустойчива. На рис. 6.12 ($l = 0$) имеется -1 переход на частоте Ω_1 и +1 на частоте Ω_2. Сумма переходов равна нулю и замкнутая система устойчива.

Сделаем теперь замечание, касающееся использования для определения устойчивости замкнутой системы передаточной функции разомкнутой системы.

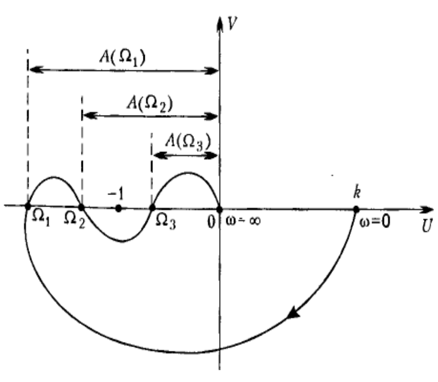


Рис. 6.12

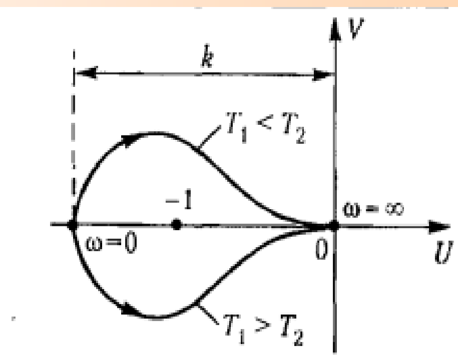


Рис. 6.15

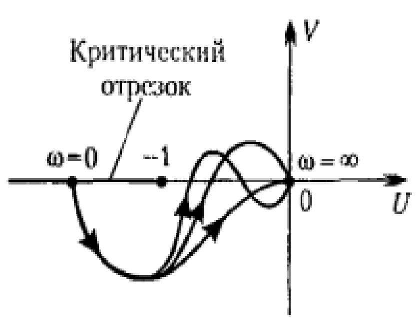


Рис. 6.16

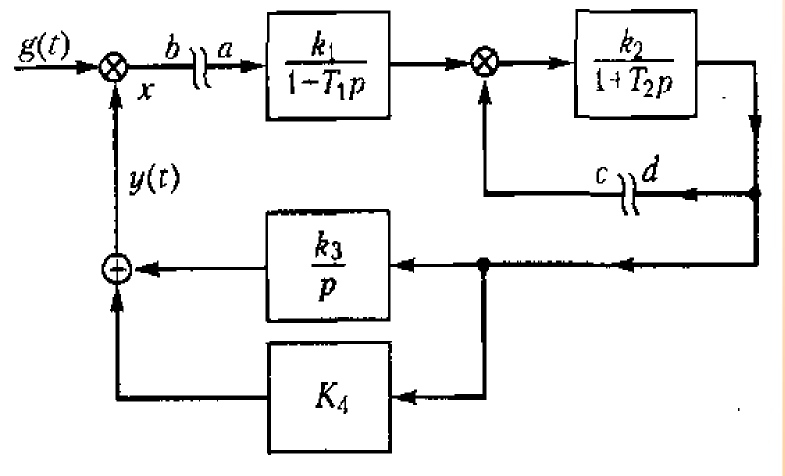
Критерий устойчивости Найквиста

В случае многоконтурной системы управления размыкание ее для получения передаточной функции разомкнутой системы можно делать, вообще говоря, в произвольном месте. Рассмотрим, например, систему, структурная схема которой изображена на рис. 6.17.

Разомкнем систему на входе первого звена. Тогда, рассматривая точку *a* как вход, а точку *b* как выход, получаем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p)=\frac{k_1}{1+T_1p}\frac{k_2}{1+k_2+T_2p}\left(\frac{k_3}{p}+k_4\right)=\frac{k_1k_2k_3+k_1k_2k_4p}{p(1+T_1p)(1+k_2+T_2p)}.$$

Разомкнем теперь ту же систему не на входе первого звена, а в цепи обратной связи второго звена (точка *c* соответствует входу, а точка *d* — выходу).



Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае

$$W'(p)=\frac{\frac{k_2}{1+T_2p}}{1+\frac{k_1}{1+T_1p}\frac{k_2}{1+T_2p}\left(\frac{k_3}{p}+k_4\right)}=\frac{k_2p(1+T_1p)}{p(1+T_1p)(1+T_2p)+k_1k_2k_3+k_1k_2k_4p}.$$

Критерий устойчивости Найквиста

Передаточные функции $W(p)$ и $W'(p)$ получились различными. Однако им соответствует одно и то же характеристическое уравнение замкнутой системы $1 + W(p) = 1 + W'(p) = 0$, которое имеет вид

$$T_1T_2p^3+(T_1+T_2+k_2T_1)p^2+(1+k_2+k_1k_2k_4)p+k_1k_2k_3 = 0.$$

Поэтому для определения устойчивости можно пользоваться передаточной функцией разомкнутой системы, полученной размыканием исходной системы в произвольной точке, в которой выполняется условие детектирования.

Однако передаточные функции $W(p)$ и $W'(p)$ имеют различие. Только передаточная функция $W(p)$ связывает между собой изображения управляемой величины и ошибки, и только она связана с передаточной функцией замкнутой системы $\Phi(p)$ известным соотношением

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\Phi(p)}{1-\Phi(p)}.$$

Передаточную функцию при размыкании на входе первого звена в дальнейшем будем считать главной передаточной функцией разомкнутой системы и именно ее иметь в виду при рассмотрении методов определения качества управления и синтеза систем управления.

Учебный вопрос № 2.

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Для определения устойчивости по критерию Найквиста можно строить не амплитудно-фазовую характеристику, а логарифмическую амплитудную частотную характеристику (л. а. х.) и логарифмическую фазовую частотную характеристику (л. ф. х.) разомкнутой системы.

Построение л. а. х. производится по выражению

$L(\omega) = 20\ lg\ A(\omega) = 20\ lg\ |W(j\omega)|$,

где $A(\omega)$ — модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы (6.23).

Построение л. ф. х. производится по значению $\psi(\omega)$ частотной передаточной функции (6.23). Для построения л. а. х. и л. ф. х. удобно использовать стандартную сетку.

Наиболее простое построение получается, если передаточную функцию разомкнутой системы можно свести к виду

$$W(p) = \frac{K}{p^r}\frac{\prod_{j=1}^{m}(1+\tau_j p)}{\prod_{i=1}^{n-r}(1+T_i p)}.$$

При подстановке $p = j\omega$ получаем

$$L(\omega) = 20lg\,\frac{K}{\omega^r}\frac{\prod_{j=1}^{m}(1+\omega^2\tau_j^2)}{\prod_{i=1}^{n-r}(1+\omega^2 T_i^2)}. \qquad (6.26)$$

Фаза (аргумент) частотной передаточной функции

$$\psi(\omega) = -r\cdot 90° + \sum_{j=1}^{m} arctg\omega\tau_j - \sum_{i=1}^{n-r} arctg\omega T_i. \qquad (6.27)$$

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

На основании (6.26) можно легко, без дополнительных вычислений построить асимптотическую л. а. х для чего на стандартной сетке (рис. 6.18) наносятся вертикальные прямые при сопрягающих частотах $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ и $\omega_j = \frac{1}{\tau_j}$. Для определенности построения возьмем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K(1+\tau_1 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)^2}. \qquad (6.28)$$

которой соответствует выражение для модуля в логарифмическом масштабе

$$L(\omega) = 20lg\frac{K}{\omega}\frac{\sqrt{1+\tau_1^2\omega^2}}{\sqrt{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}}. \qquad (6.29)$$

Примем, например, что K = 50 с$^{-1}$, T_1 = 0,5 с, τ_1 = 0,2 с, T_2 = 0,0125 с. Тогда сопрягающие частоты ω_1= 2 с$^{-1}$, ω_2 = 5 с$^{-1}$, ω_3 = 80 с$^{-1}$.

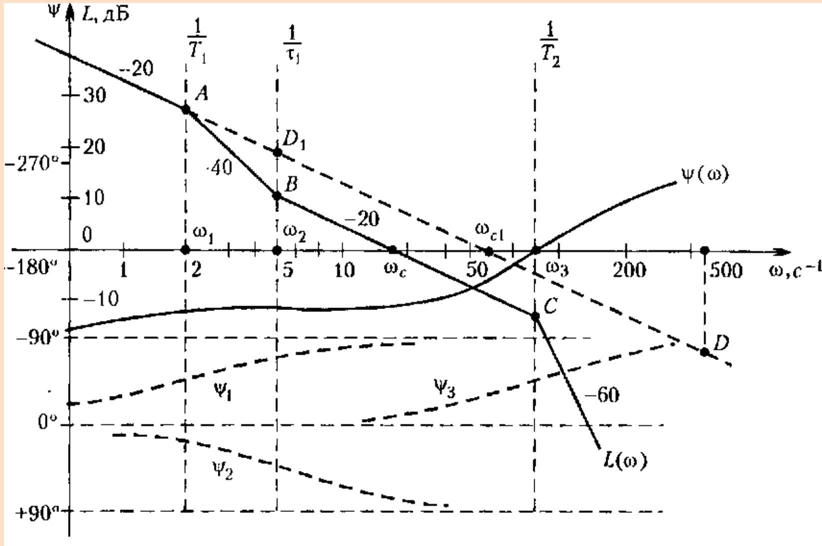


Рис. 6.18

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Вначале построим первую асимптоту. При $\omega < \omega_1$ выражение (6.29) приобретает вид

$$L(\omega) \approx 20lg\frac{K}{\omega},$$

которому (см. Л4) соответствует прямая с наклоном -20 дБ/дек, пересекающая ось абсцисс при $\omega = \omega_1 = K$. Для получения второй точки этой прямой откладываем от точки ω_{c1} =50 c^{-1} одну декаду вправо, т. е. до частоты ω = 10 ω_{c1}=500 c^{-1}, и находим точку *D*, находящуюся на 20 дБ ниже оси абсцисс. Можно отложить одну декаду и влево до частоты ω = 0,l ω_{c1} =5 c^{-1} и найти точку D_1, находящуюся на 20 дБ выше оси абсцисс.

Первую асимптоту проводим до первой сопрягающей частоты ω_1 (точка *А*). Так как этой частоте соответствует постоянная времени T_1, находящаяся в знаменателе (6.28), то л. а. х. необходимо «изломать» на -20 дБ/дек, и наклон второй асимптоты станет равным -40дБ/дек. Это означает, что через одну декаду, т. е. на частоте ω = 10 ω_1, точка *А* опустится на 40 дБ.

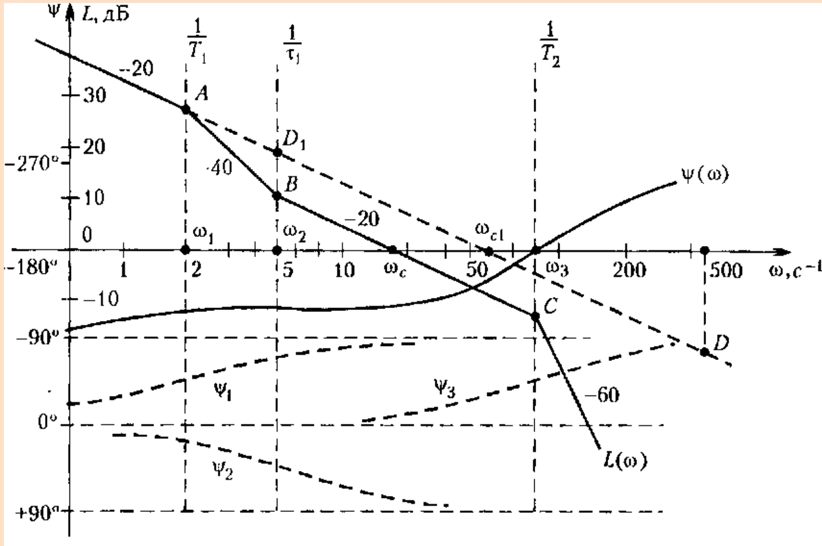


Рис. 6.18

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Вторую асимптоту доводим до второй сопрягающей частоты ω_2 (точка *B*). Так как частоте ω_2 соответствует постоянная времени τ_1, находящаяся в числителе (6.28), то л. а. х. «изламываем» на +20 дБ/дек и наклон третьей асимптоты составит -20 дБ/дек. Доводим ее до третьей сопрягающей частоты ω_3 (точка *C*). Так как этой частоте соответствует постоянная времени T_2 сомножителя второго порядка знаменателя (6.28), то л. а. х. «изламываем» на -40 дБ/дек и последняя асимптота будет иметь наклон -60 дБ/дек.

Действительная л. а. х. несколько отличается от асимптотической (см. Л4). Максимальные отклонения имеют место на сопрягающих частотах. На частоте ω_1 действительная л. а. х. проходит на 3 дБ ниже, на частоте ω_2 — на 3 дБ выше, а на частоте ω_3 — на 6 дБ ниже асимптотической.

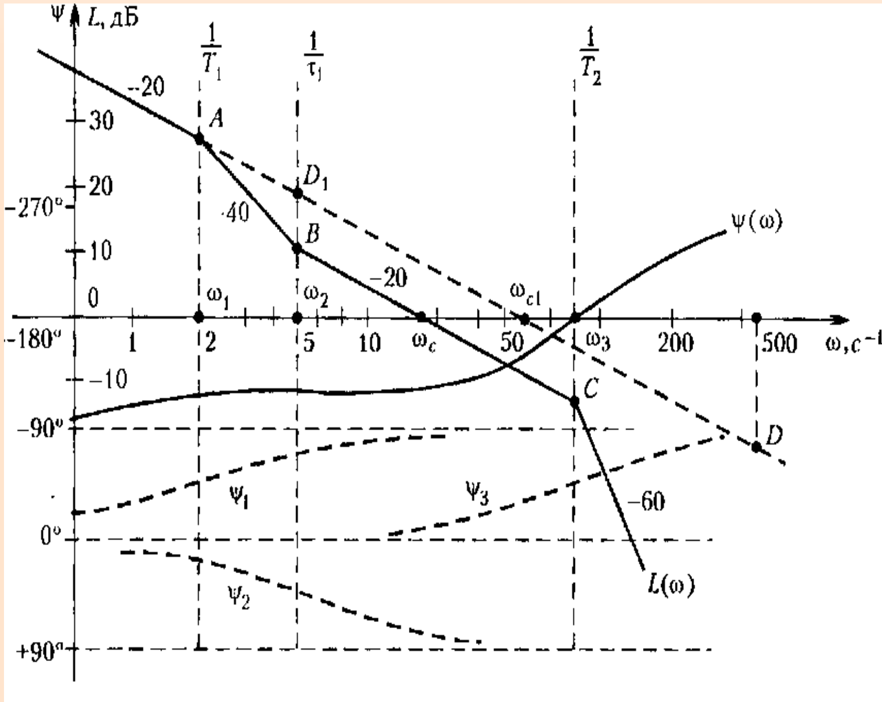


Рис. 6.18

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Выражение для фазы (6.28) имеет вид

$$\psi(\omega) = -90° - arctg\ \omega T_1 + arctg\ \omega\tau_1 - 2arctg\ \omega T_2 = -90° + \psi_1 + \psi_2 + 2\psi_3 \qquad (6.30)$$

Каждая из составляющих ψ_1, ψ_2, ψ_3 представляет, по сути дела, одну и ту же зависимость от частоты. Поэтому достаточно построить, например, только зависимость $\psi_1 = -\mathrm{arctg}\ \omega T_1$ (см. рис. 6.18). Все остальные получаются простым сдвигом этой фазовой характеристики так, чтобы на соответствующей сопрягающей частоте иметь фазовый сдвиг 45°.

При этом необходимо учитывать знак каждого слагаемого (6.30). Логарифмическая фазовая характеристика (рис. 6.18) получается в результате алгебраического суммирования всех слагаемых (6.30). Построение л. ф. х. можно существенно упростить, если заранее будет подготовлен шаблон для одной из указанных зависимостей.

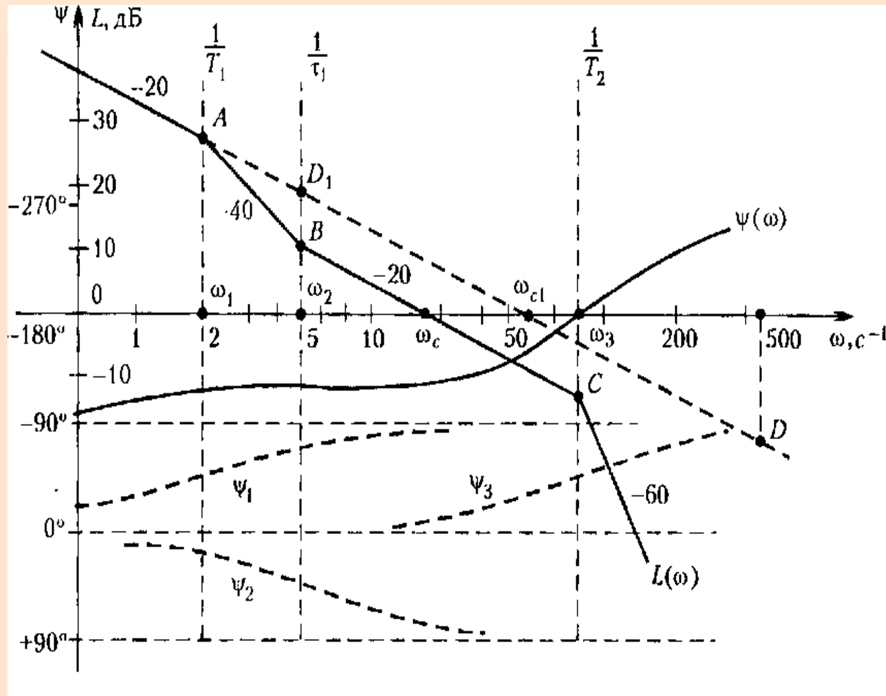


Рис. 6.18

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Аналогичное построение л. а. х. и л. ф. х. может быть сделано при любом значении r. Разница будет заключаться в наклоне первой асимптоты л. а. х. и величине первого слагаемого выражения для фазы (6.27).

При $r = 0$ первая асимптота проходит параллельно оси абсцисс на расстоянии 20 lg K. При $r \geq 1$ ее наклон равен $-r \cdot 20$ дБ/дек, а ее частота среза $\omega_{c1} = \sqrt[r]{K}$.

В тех случаях, когда в передаточной функции разомкнутой системы (6.22) имеются сомножители типа $\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1$ и $T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ с комплексными корнями, построение асимптотической л. а. х. принципиально не отличается от рассмотренного выше. Сопрягающими частотами для них будут $\omega = \frac{1}{\tau}$ и $\omega = \frac{1}{T}$. На первой л. а. х. дополнительно изламывается на +40 дБ/дек, а на второй — на -40 дБ/дек. Однако при малых значениях параметра затухания ξ, отклонение действительной л. а. х. от асимптотической оказывается значительным. Поэтому при $\xi < 0{,}3$ в асимптотическую л. а. х. следует внести поправки в соответствии с рис. 4.15 или рис. 4.16 (для первого из указанных сомножителей они берутся с обратным знаком).

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Аналогично изложенному выше строится и л. ф. х. Для построения составляющих фазовой характеристики, соответствующих сомножителям с комплексными корнями, можно использовать графики, приведенные на рис. 4.15.

Обратимся теперь к исследованию устойчивости замкнутой системы по построенным л. а. х. и л. ф. х. разомкнутой системы. Для этого воспользуемся последней из приведенных выше формулировок критерия Найквиста, связанной с прохождением а. ф. х. через критический отрезок.

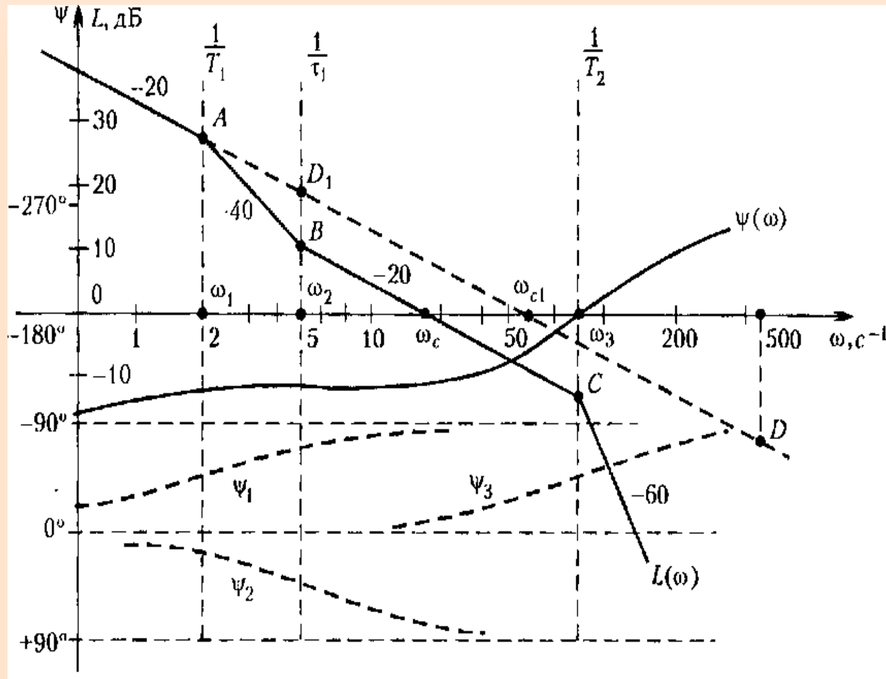


Рис. 6.18

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

На плоскости а. ф. х. разомкнутой системы критический отрезок (см. рис. 6.16) представляет собой отрезок вещественной оси, на котором фаза $\psi(\omega)$ = -180°, а модуль $A(\omega) \geq 1$. На плоскости л. ч. х. разомкнутой системы фаза $\psi(\omega)$ = -180° на всей оси абсцисс, а модуль $A(\omega) > 1$ там, где $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) > 0$. Например, на рис. 6.18 эти условия выполняются на отрезке оси абсцисс, расположенном левее частоты среза л. а. х. ω_c.

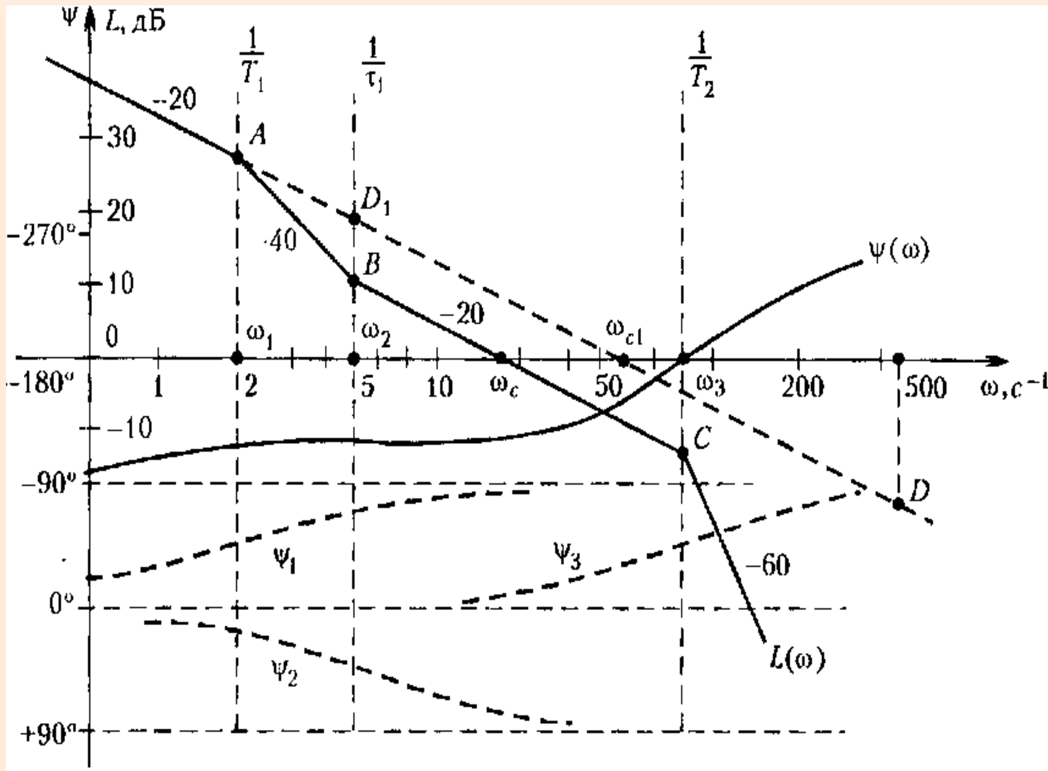


Рис. 6.18

Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Таким образом, для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы *сумма переходов логарифмической фазовой характеристики* разомкнутой системы через критический отрезок была равна $\frac{l}{2}$, где l — число корней с положительной вещественной частью в знаменателе передаточной функции разомкнутой системы $W(p)$. Как и прежде, переход сверху вниз считается положительным, а снизу вверх — отрицательным.

Так, на рис. 6.18 л. ф. х. не пересекает критический отрезок (переходов нет), в знаменателе передаточной функции (6.28) корней с положительной вещественной частью нет (l =0) и, следовательно, замкнутая система устойчива.

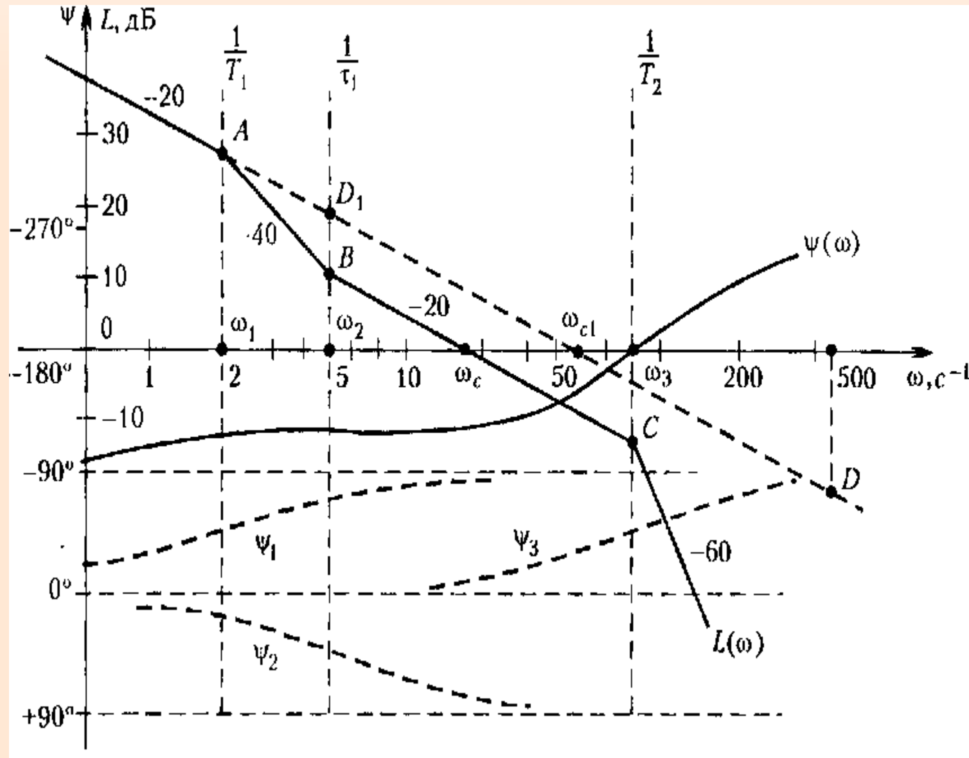
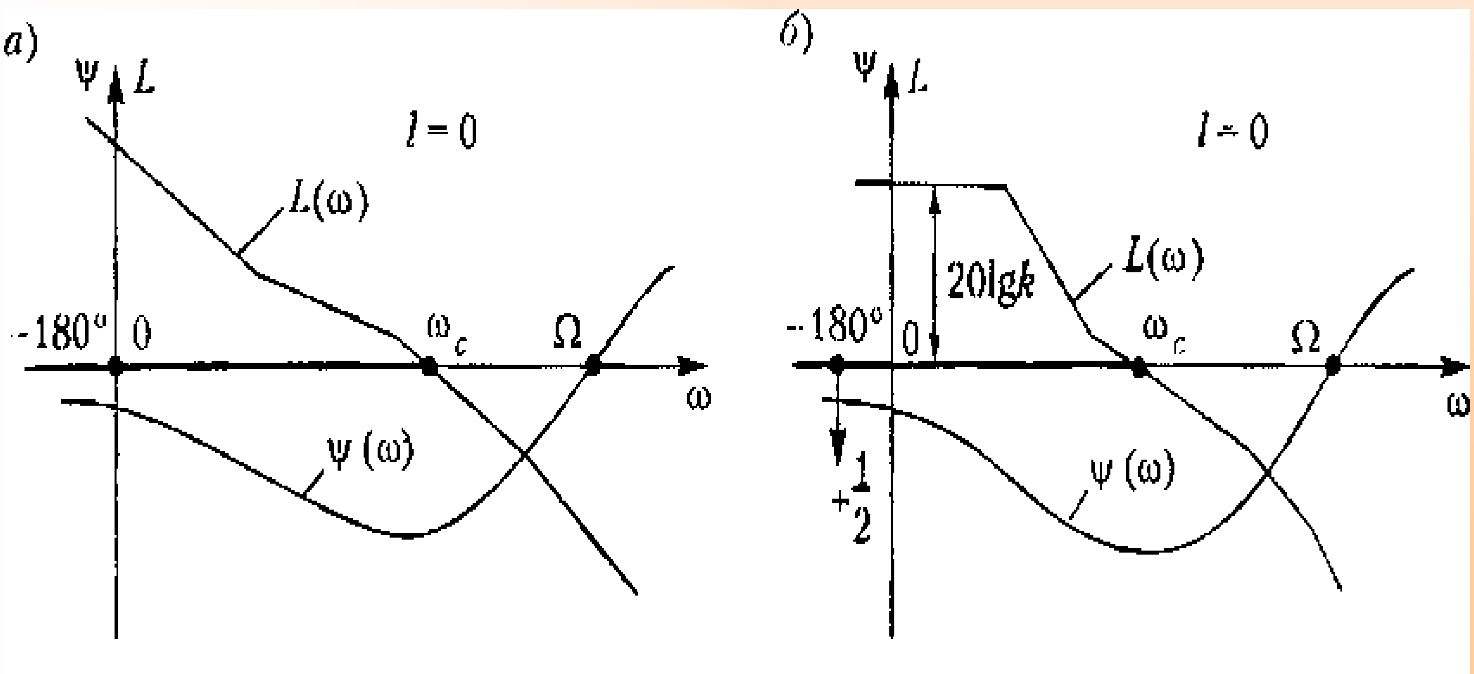


Рис. 6.18

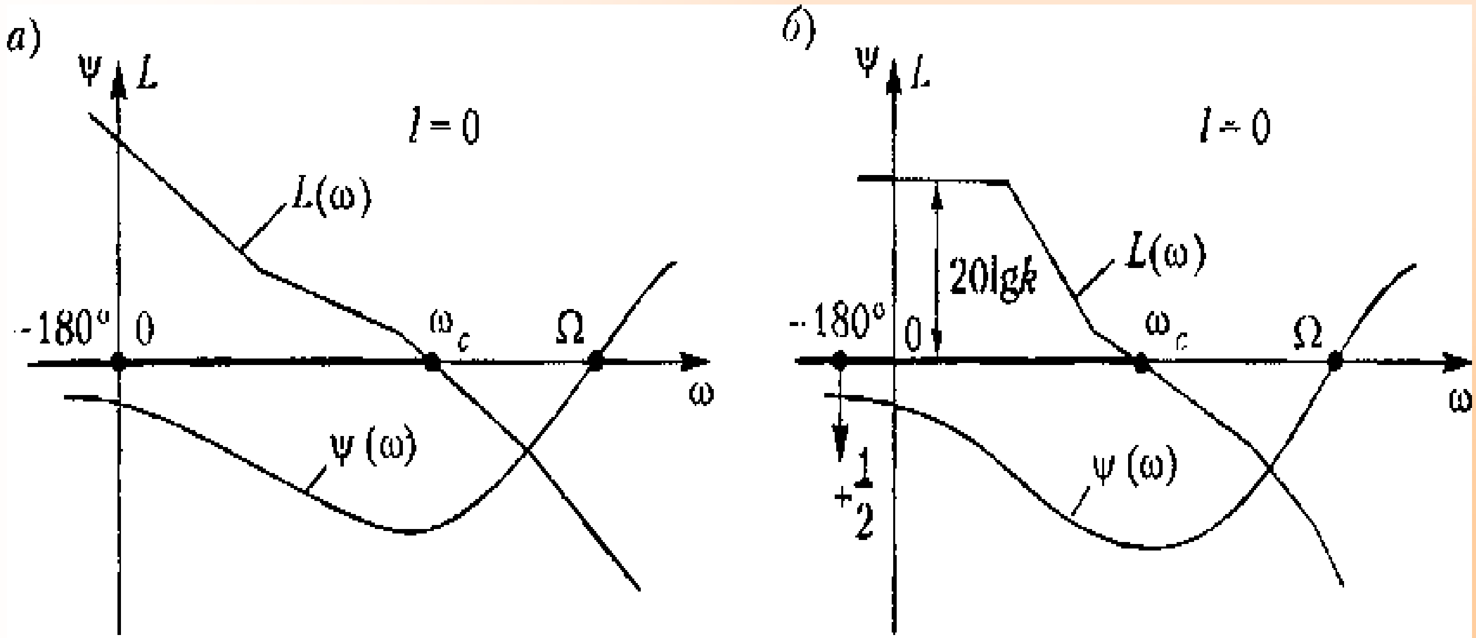
Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

Аналогично обстоит дело и с замкнутой системой, л. ч. х. которой в разомкнутом состоянии изображены на рис. 6.19, *а*. В обоих случаях при увеличении коэффициента передачи разомкнутой системы л. а. х. будет сдвигаться вправо параллельно самой себе, а л. ф. х. изменяться не будет. Поэтому (см. рис. 6.19, *а*), когда частота среза л. а. х. $\omega_с$ станет равной частоте Ω, замкнутая система попадет на колебательную границу устойчивости, а при $\omega_с > \Omega$ появится -1 переход через критический отрезок и замкнутая система станет неустойчивой.



Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

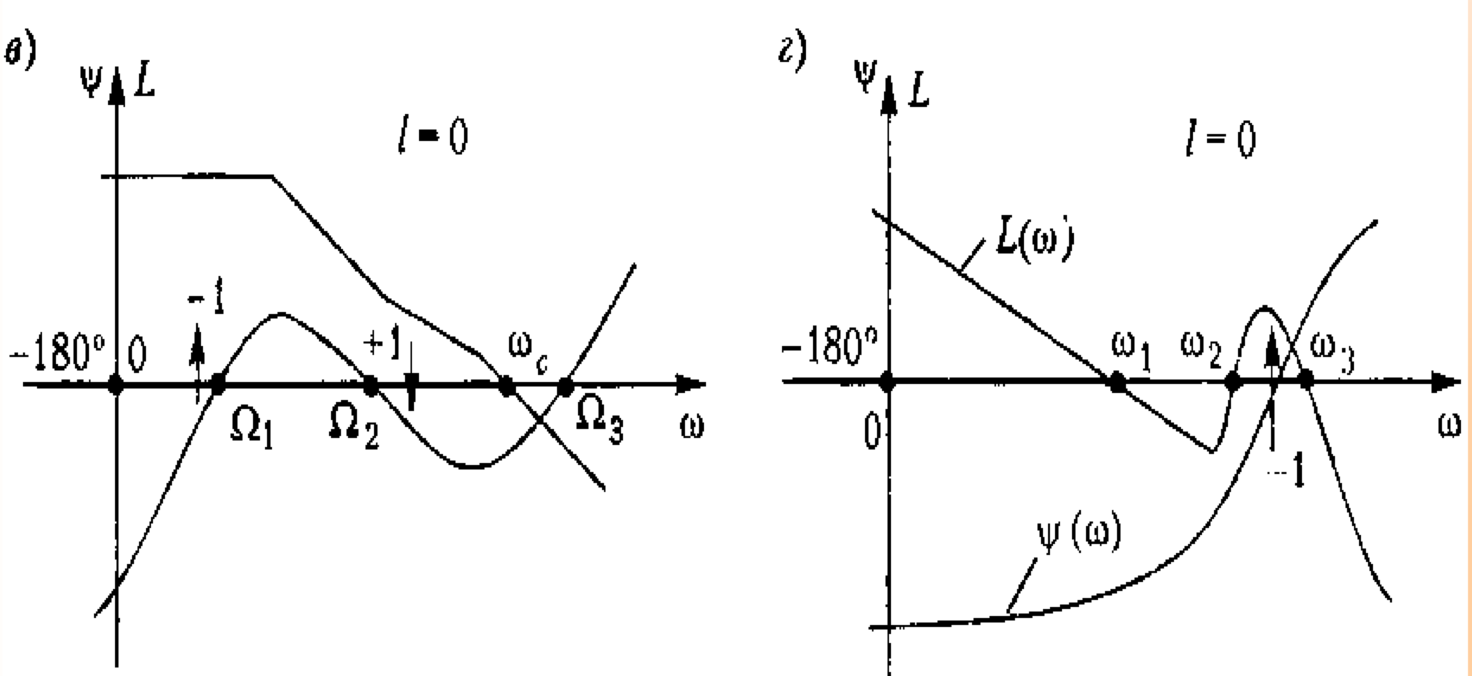
На рис. 6.19, *б* изображены л. ч. х., соответствующие второй из а. ф. х., показанных на рис. 6.16. В этом случае замкнутая система устойчива, так как при $l = 1$ имеется $+{}^{1}/_{2}$ перехода через критический отрезок на частоте $\omega = 0$. Его наличие объясняется тем, что фаза $\psi(0) = -180°$, а первая асимптота л. а. х. идет параллельно оси абсцисс, т. е. модуль $A(0) = k$. Это означает, что а. ф. х. (см. рис. 6.16) при $\omega = 0$ начинается на критическом отрезке. На рис. 6.19, *а* такого перехода нет, так как фаза $\psi(0) = -180°$, но первая асимптота л. а. х. имеет отрицательный наклон и $A(0) = \infty$.



Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам

На рис. 6.19, *в* изображены л. ч. х., соответствующие рис. 6.12. Здесь имеется +1 переход на частоте Ω_2 и -1 переход на частоте Ω_1. Замкнутая система устойчива, так как $l = 0$ и сумма переходов равна нулю.

На рис. 6.19, *г* показан случай, когда критический отрезок состоит из двух частей. Одна его часть находится на частотах $\omega \leq \omega_1$, а другая на частотах $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$. Так как имеется -1 переход через вторую часть критического отрезка, то замкнутая система неустойчива.



Задание на самостоятельную подготовку:

Повторить:

1) Критерий устойчивости Найквиста.
2) Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам.

Перечень вопросов
для проведения письменного или устного контроля по теме № 6.2
«Критерий устойчивости Найквиста. Определение устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам»

1. Частотные критерии устойчивости.
2. Абсолютно устойчивая система.
3. Условно устойчивая система.

Литература

- Бессекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – Изд. 4-е, перераб. И доп. – СПб, Изд-во «Профессия», 2004. – стр. 131 - 148.